Całka podwójna i potrójna w obszarze regularnym. Całki iterowane.

Anna Bahyrycz

Całki podwójne

Definicja 1

- R - *prostokąt*
- $R_1, R_2, \ldots, R_n$ - *podział* $\mathcal{P}$ *prostokąta* R *na prostokąty o parami rozłącznych wnętrzach, które całkowicie wypełniają* R
- *prostokąt* R_k *ma wymiary* $\Delta x_k \times \Delta y_k,\ \ k = 1, 2, \ldots, n$
- $d_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$ - *długość przekątnej prostokąta* R_k
- $\delta(\mathcal{P}) = \max\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ - *średnica podziału* $\mathcal{P}$
- *wybieramy punkty pośrednie* $(x_k^*, y_k^*) \in R_k,\ \ k = 1, 2, \ldots, n$

Niech $f(x, y)$ *będzie funkcją ograniczoną na prostokącie* R. *Całkę podwójną z funkcji* f *po prostokącie* R *definiujemy następująco:*

$$\iint_R f(x, y)\, dxdy := \lim_{\delta(\mathcal{P}_n) \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*) \Delta x_k \Delta y_k$$

o ile granica jest właściwa i nie zależy od sposobu podziału prostokąta R *i wyboru punktów pośrednich.*
Mówimy wtedy, że funkcja $f(x, y)$ *jest całkowalna na* R.

Twierdzenie 1

Jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest ciągła na prostokącie R, to jest całkowalna na R.

Twierdzenie 2 (o liniowości całki)

Jeżeli f i g są całkowalne na prostokącie R i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, to

$$\iint_R \alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\, dxdy = \alpha \iint_R f(x,y)\, dxdy + \beta \iint_R g(x,y)\, dxdy.$$

Twierdzenie 1

Jeżeli funkcja $f(x, y)$ *jest ciągła na prostokącie* R, *to jest całkowalna na* R.

Twierdzenie 2 (o liniowości całki)

Jeżeli f *i* g *są całkowalne na prostokącie* R *i* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *to*

$$\iint_R \alpha f(x, y) + \beta g(x, y)\, dxdy = \alpha \iint_R f(x, y)\, dxdy + \beta \iint_R g(x, y)\, dxdy.$$

Twierdzenie 3 (o addytywności całki względem obszaru całkowania)

Jeżeli f *jest całkowalna na prostokącie* R *oraz* $R = R_1 \cup R_2$, *gdzie* R_1, R_2 *to prostokąty o rozłącznych wnętrzach, to*

$$\iint_R f(x, y)\, dxdy = \iint_{R_1} f(x, y)\, dxdy + \iint_{R_2} f(x, y)\, dxdy.$$

Twierdzenie 4 (o zamianie całki podwójnej na całki iterowane)

Jeżeli funkcja f jest ciągła na prostokącie $R = [a, b] \times [c, d]$, to

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\, dxdy = \int_a^b \Big[\int_c^d f(x,y)\, dy\Big] dx = \int_c^d \Big[\int_a^b f(x,y)\, dx\Big] dy.$$

Twierdzenie 4 (o zamianie całki podwójnej na całki iterowane)

Jeżeli funkcja f *jest ciągła na prostokącie* $R = [a, b] \times [c, d]$, *to*

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)\ dxdy = \int_a^b \Big[\int_c^d f(x, y)\ dy\Big] dx = \int_c^d \Big[\int_a^b f(x, y)\ dx\Big] dy.$$

Przykład 1

Oblicz

$$\iint_{[0,2]\times[-1,1]} y^3 e^{x^2}\ dxdy$$

Twierdzenie 4 (o zamianie całki podwójnej na całki iterowane)

Jeżeli funkcja f jest ciągła na prostokącie $R = [a, b] \times [c, d]$, to

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\;dxdy = \int_a^b \Big[\int_c^d f(x,y)\;dy\Big]dx = \int_c^d \Big[\int_a^b f(x,y)\;dx\Big]dy.$$

Przykład 1

Oblicz

$$\iint_{[0,2]\times[-1,1]} y^3 e^{x^2}\;dxdy = \int_0^2 \Big[\int_{-1}^1 e^{x^2} y^3\;dy\Big]dx$$

Twierdzenie 4 (o zamianie całki podwójnej na całki iterowane)

Jeżeli funkcja f jest ciągła na prostokącie $R = [a, b] \times [c, d]$, to

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \Big[\int_c^d f(x, y)\, dy \Big] dx = \int_c^d \Big[\int_a^b f(x, y)\, dx \Big] dy.$$

Przykład 1

Oblicz

$$\iint_{[0,2]\times[-1,1]} y^3 e^{x^2}\, dxdy = \int_0^2 \Big[\int_{-1}^1 e^{x^2} y^3\, dy \Big] dx = \int_0^2 \Big[\frac{1}{4} e^{x^2} y^4 \Big]_{-1}^1 dx$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^2 e^{x^2} (1 - 1) dx = 0$$

Twierdzenie 5

Jeżeli f jest funkcją o rozdzielonych zmiennych postaci $f(x,y)=g(x)h(y)$, gdzie funkcja $g(x)$ jest ciągła na $[a,b]$, zaś $h(y)$ jest ciągła na $[c,d]$, to

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\, dxdy = \Big(\int_a^b g(x)\, dx\Big)\cdot\Big(\int_c^d h(y)\, dy\Big).$$

Twierdzenie 5

Jeżeli f jest funkcją o rozdzielonych zmiennych postaci $f(x,y)=g(x)h(y)$, gdzie funkcja $g(x)$ jest ciągła na $[a,b]$, zaś $h(y)$ jest ciągła na $[c,d]$, to

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy = \Big(\int_a^b g(x)\,dx\Big)\cdot\Big(\int_c^d h(y)\,dy\Big).$$

Przykład 2

Zamień na sumę iloczynów całek pojedynczych

$$\iint_{[1,3]\times[1,e]} \Big(\frac{2y^2}{x^3}+\frac{3x}{y}\Big)\,dxdy$$

Twierdzenie 5

Jeżeli f jest funkcją o rozdzielonych zmiennych postaci $f(x,y) = g(x)h(y)$, gdzie funkcja $g(x)$ jest ciągła na $[a,b]$, zaś $h(y)$ jest ciągła na $[c,d]$, to

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy = \Big(\int_a^b g(x)\,dx\Big)\cdot\Big(\int_c^d h(y)\,dy\Big).$$

Przykład 2

Zamień na sumę iloczynów całek pojedynczych

$$\iint_{[1,3]\times[1,e]} \Big(\frac{2y^2}{x^3} + \frac{3x}{y}\Big)\,dxdy$$

$$= 2\Big(\int_1^3 \frac{1}{x^3}\,dx\Big)\cdot\Big(\int_1^e y^2\,dy\Big) + 3\Big(\int_1^3 x\,dx\Big)\cdot\Big(\int_1^e \frac{1}{y}\,dy\Big).$$

Definicja 2

Niech

- D *będzie obszarem ograniczonym na płaszczyźnie,*
- $f(x,y)$ *będzie funkcją określoną i ograniczoną na* D*,*
- R *dowolnym prostokątem takim, że* $D \subset R$*.*

Definiujemy rozszerzenie funkcji f *na prostokąt* R*:*

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{dla } (x,y) \in D \\ 0 & \text{dla } (x,y) \in R \setminus D \end{cases} .$$

Całkę podwójną z funkcji f *po obszarze* D *definiujemy wzorem:*

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = \iint_R f^*(x,y)\, dxdy,$$

o ile całka po prostokącie R *istnieje.*
Mówimy wtedy, że funkcja f *jest całkowalna na* D*.*

Definicja 2

Niech

- D *będzie obszarem ograniczonym na płaszczyźnie,*
- $f(x,y)$ *będzie funkcją określoną i ograniczoną na* D*,*
- R *dowolnym prostokątem takim, że* $D \subset R$*.*

Definiujemy rozszerzenie funkcji f *na prostokąt* R*:*

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \textit{dla } (x,y) \in D \\ 0 & \textit{dla } (x,y) \in R \setminus D \end{cases} .$$

Całkę podwójną z funkcji f *po obszarze* D *definiujemy wzorem:*

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_R f^*(x,y)\,dxdy,$$

o ile całka po prostokącie R *istnieje.*
Mówimy wtedy, że funkcja f *jest całkowalna na* D*.*

Uwaga 1

Całka $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ *nie zależy od wyboru prostokąta* R*.*

Twierdzenie 6

Niech obszar D ma postać:

$$D = \{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b,\ d(x) \leqslant y \leqslant g(x)\},$$

gdzie $d(x), g(x)$ są funkcjami ciągłymi na $[a, b]$ i $d(x) < g(x)$ dla $x \in (a, b)$ (jest to tzw. obszar normalny względem osi 0x).
Jeżeli $f(x, y)$ jest ciągła na obszarze D, to

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \Big[\int_{d(x)}^{g(x)} f(x, y)\, dy\Big] dx.$$

Twierdzenie 7

Niech obszar D ma postać:

$$D = \{(x, y) : c \leqslant y \leqslant d,\ p(y) \leqslant x \leqslant q(y)\},$$

gdzie $p(y), q(y)$ są funkcjami ciągłymi na $[c, d]$ i $p(y) < q(y)$ dla $y \in (c, d)$ (jest to tzw. obszar normalny względem osi 0y).
Jeżeli $f(x, y)$ jest ciągła na obszarze D, to

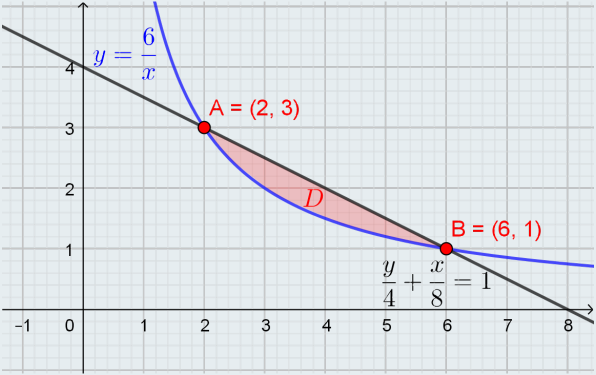
$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \int_c^d \Big[\int_{p(y)}^{q(y)} f(x, y)\, dx\Big] dy.$$

Przykład 3

Zamienić na całki iterowane całkę podwójną z funkcji f *całkowalnej na obszarze* D *ograniczonym krzywymi:* $x + 2y = 8$ *i* $xy = 6$.

Przykład 3

Zamienić na całki iterowane całkę podwójną z funkcji f *całkowalnej na obszarze* D *ograniczonym krzywymi:* $x + 2y = 8$ *i* $xy = 6$.

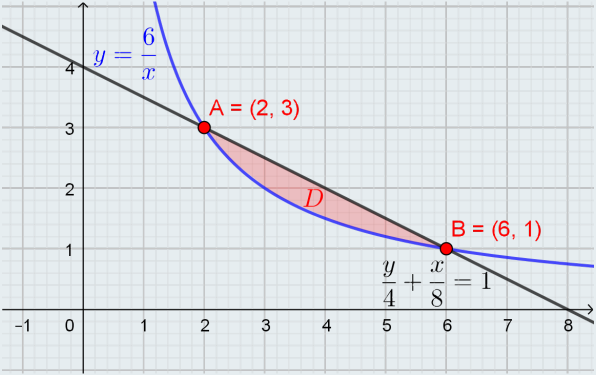


D jest obszarem normalnym względem obu osi

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy$$

Przykład 3

Zamienić na całki iterowane całkę podwójną z funkcji f *całkowalnej na obszarze* D *ograniczonym krzywymi:* $x + 2y = 8$ *i* $xy = 6$.

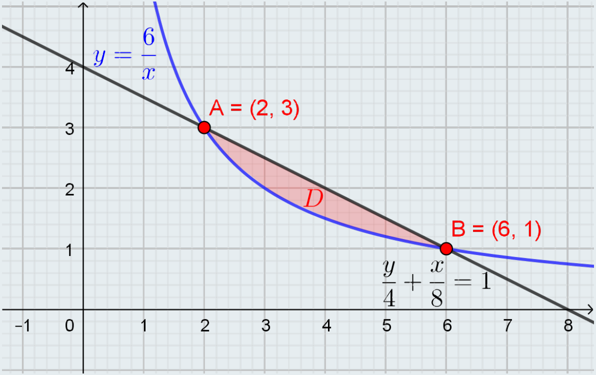


D *jest obszarem normalnym względem obu osi*

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_2^6 \Big[\int_{\frac{6}{x}}^{4-\frac{x}{2}} f(x,y)\,dy\Big]dx$$

Przykład 3

Zamienić na całki iterowane całkę podwójną z funkcji f *całkowalnej na obszarze* D *ograniczonym krzywymi:* $x + 2y = 8$ *i* $xy = 6$.



D *jest obszarem normalnym względem obu osi*

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_2^6 \Big[\int_{\frac{6}{x}}^{4-\frac{x}{2}} f(x,y)\,dy\Big]dx = \int_1^3 \Big[\int_{\frac{6}{y}}^{8-2y} f(x,y)\,dx\Big]dy$$

Definicja 3

Sumę skończonej liczby obszarów normalnych (względem osi $0x$ lub $0y$) o parami rozłącznych wnętrzach nazywamy obszarem regularnym na płaszczyźnie.

Definicja 3

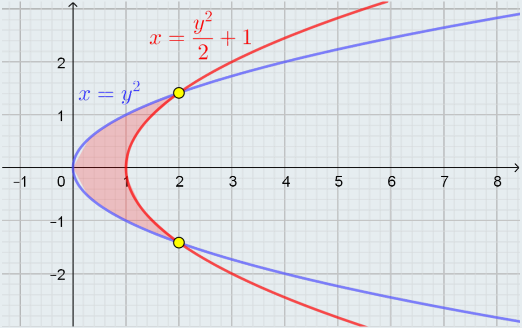
Sumę skończonej liczby obszarów normalnych (względem osi $0x$ lub $0y$) o parami rozłącznych wnętrzach nazywamy obszarem regularnym na płaszczyźnie.

Twierdzenie 8

Całki po obszarach regularnych mają te same własności co całki po prostokątach, tzn. liniowość, addytywność względem obszaru całkowania.

Zamienić na całki iterowane całkę podwójną z funkcji f *całkowalnej na obszarze* D *ograniczonym krzywymi:* $x = y^2$ *i* $x = \frac{y^2}{2} + 1$.

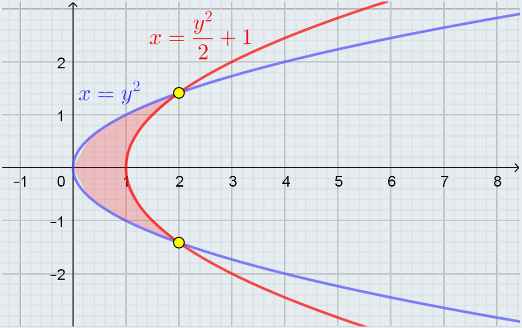
Zamienić na całki iterowane całkę podwójną z funkcji f *całkowalnej na obszarze* D *ograniczonym krzywymi:* $x = y^2$ *i* $x = \frac{y^2}{2} + 1$.



D *jest obszarem normalnym względem osi* Oy

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy$$

Zamienić na całki iterowane całkę podwójną z funkcji f *całkowalnej na obszarze* D *ograniczonym krzywymi:* $x = y^2$ *i* $x = \frac{y^2}{2} + 1$.

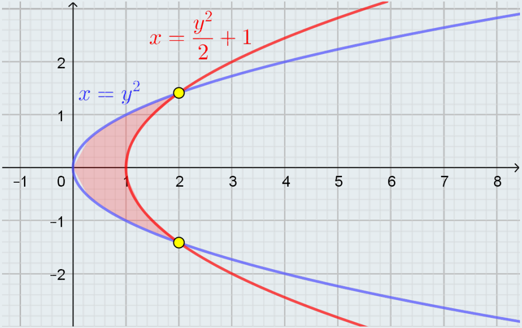


D *jest obszarem normalnym względem osi* Oy

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \Big[\int_{y^2}^{\frac{y^2}{2}+1} f(x,y)\,dx \Big] dy$$

Przykład 4

Zamienić na całki iterowane całkę podwójną z funkcji f *całkowalnej na obszarze* D *ograniczonym krzywymi:* $x = y^2$ *i* $x = \frac{y^2}{2} + 1$.



D *jest obszarem normalnym względem osi* Oy

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \Big[\int_{y^2}^{\frac{y^2}{2}+1} f(x,y)\,dx\Big]dy$$

$$= \int_0^1 \Big[\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\Big]dx + \int_1^2 \Big[\int_{\sqrt{2(x-1)}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\Big]dx + \int_1^2 \Big[\int_{-\sqrt{x}}^{-\sqrt{2(x-1)}} f(x,y)\,dy\Big]dx$$

Definicja 4

- P - *prostopadłościan*
- $P_1, P_2, \dots, P_n$ - *podział* $\mathcal{P}$ *prostopadłościanu* P *na prostopadłościany o parami rozłącznych wnętrzach, które całkowicie wypełniają* P
- *prostopadłościan* P_k *ma wymiary* $\Delta x_k \times \Delta y_k \times \Delta z_k,\ \ k = 1, 2, \dots, n$
- $d_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2 + (\Delta z_k)^2}$ - *długość przekątnej prostopadłościanu* P_k
- $\delta(\mathcal{P}) = \max\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ - *średnica podziału* $\mathcal{P}$
- *wybieramy punkty pośrednie* $(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \in P_k,\ \ k = 1, 2, \dots, n$

Niech $f(x, y, z)$ *będzie funkcją ograniczoną na prostopadłościanie* P. *Całka potrójna z funkcji* f *po prostopadłościanie* P *to:*

$$\iiint_P f(x, y, z)\, dxdydz := \lim_{\delta(\mathcal{P}_n) \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k$$

o ile granica jest właściwa i nie zależy od sposobu podziału prostopadłościanu P *i wyboru punktów pośrednich.*
Mówimy wtedy, że funkcja $f(x, y, z)$ *jest całkowalna na* P.

Twierdzenie 9

Jeżeli funkcja $f(x,y,z)$ jest ciągła na prostopadłościan P, to jest całkowalna na P.

Twierdzenie 10 (o liniowości całki)

Jeżeli f i g są całkowalne na prostopadłościanie P i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, to

$$\iiint_P \alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z)\, dxdydz =$$

$$= \alpha \iiint_P f(x,y,z)\, dxdydz + \beta \iiint_P g(x,y,z)\, dxdydz.$$

Twierdzenie 9

Jeżeli funkcja $f(x,y,z)$ jest ciągła na prostopadłościan P, to jest całkowalna na P.

Twierdzenie 10 (o liniowości całki)

Jeżeli f i g są całkowalne na prostopadłościanie P i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, to

$$\iiint_P \alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z)\, dxdydz =$$

$$= \alpha \iiint_P f(x,y,z)\, dxdydz + \beta \iiint_P g(x,y,z)\, dxdydz.$$

Twierdzenie 11 (o addytywności całki względem obszaru całkowania)

Jeżeli f jest całkowalna na prostopadłościanie P oraz $P = P_1 \cup P_2$, gdzie P_1, P_2 to prostopadłościany o rozłącznych wnętrzach, to

$$\iiint_P f(x,y,z)\, dxdydz = \iiint_{P_1} f(x,y,z)\, dxdydz + \iiint_{P_2} f(x,y,z)\, dxdydz.$$

Twierdzenie 12 (o zamianie całki potrójnej na całki iterowane)

Jeżeli funkcja f jest ciągła na prostopadłościanie $P = [a,b] \times [c,d] \times [p,q]$, to

$$\iiint_{[a,b]\times[c,d]\times[p,q]} f(x,y,z)\, dxdydz = \int_a^b \left\{ \int_c^d \left[\int_p^q f(x,y,z)\, dz \right] dy \right\} dx.$$

Uwaga 2

Powyższe twierdzenie jest prawdziwe także wtedy, gdy po prawej stronie równości napiszemy dowolną całkę iterowaną.

Przykład 5

Oblicz

$$\iiint_P xz\sin(xy)\, dxdydz, \qquad P=\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]\times[0,\pi]\times[0,1].$$

Przykład 5

Oblicz

$$\iiint_P xz\sin(xy)\;dxdydz, \qquad P = \left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]\times[0,\pi]\times[0,1].$$

$$\iiint_{[\frac{1}{3},\frac{1}{2}]\times[0,\pi]\times[0,1]} xz\sin(xy)\;dxdydz = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^1 zx\sin(xy)\;dz\right]dy\right\}dx$$

Przykład 5

Oblicz

$$\iiint_P xz\sin(xy)\, dxdydz, \qquad P = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \times [0,\pi] \times [0,1].$$

$$\iiint_{[\frac{1}{3},\frac{1}{2}]\times[0,\pi]\times[0,1]} xz\sin(xy)\, dxdydz = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^1 zx\sin(xy)\, dz \right] dy \right\} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^{\pi} x\sin(xy) \left[z^2\right]_{z=0}^{z=1} dy \right\} dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^{\pi} x\sin(xy)\, dy \right\} dx$$

Przykład 5

Oblicz

$$\iiint_P xz\sin(xy)\ dxdydz, \qquad P = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \times [0,\pi] \times [0,1].$$

$$\iiint_{[\frac{1}{3},\frac{1}{2}]\times[0,\pi]\times[0,1]} xz\sin(xy)\ dxdydz = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^{\pi} \left[\int_0^1 zx\sin(xy)\ dz \right] dy \right\} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^{\pi} x\sin(xy)\left[z^2\right]_{z=0}^{z=1} dy \right\} dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^{\pi} x\sin(xy)\ dy \right\} dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \left\{ x \cdot \frac{1}{x}\left[\cos(xy)\right]_{y=0}^{y=\pi} \right\} dx = -\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} (\cos(\pi x) - 1) dx$$

Przykład 5

Oblicz

$$\iiint_P xz\sin(xy)\ dxdydz, \qquad P=\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]\times[0,\pi]\times[0,1].$$

$$\iiint_{[\frac{1}{3},\frac{1}{2}]\times[0,\pi]\times[0,1]} xz\sin(xy)\ dxdydz = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_0^{\pi}\left[\int_0^1 zx\sin(xy)\ dz\right]dy\right\}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_0^{\pi} x\sin(xy)\Big[z^2\Big]_{z=0}^{z=1}\ dy\right\}dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_0^{\pi} x\sin(xy)\ dy\right\}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\left\{x\cdot\frac{1}{x}\Big[\cos(xy)\Big]_{y=0}^{y=\pi}\right\}dx = -\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}(\cos(\pi x)-1)dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)-x\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)+\frac{1}{12}$$

Twierdzenie 13

Jeżeli f jest funkcją o rozdzielonych zmiennych postaci $f(x,y,z) = g(x)h(y)k(z)$, gdzie funkcje $g,\ h,\ k$ są ciągłe odpowiednio na przedziałach $[a,b]$, $[c,d]$ i $[p,q]$, to

$$\iiint_{[a,b]\times[c,d]\times[p,q]} f(x,y,z)\; dxdydz = \left(\int_a^b g(x)\; dx\right)\cdot\left(\int_c^d h(y)\; dy\right)\cdot\left(\int_p^q k(z)\; dz\right).$$

Twierdzenie 13

Jeżeli f *jest funkcją o rozdzielonych zmiennych postaci* $f(x,y,z) = g(x)h(y)k(z)$*, gdzie funkcje* g*,* h*,* k *są ciągłe odpowiednio na przedziałach* $[a,b]$*,* $[c,d]$ *i* $[p,q]$*, to*

$$\iiint_{[a,b]\times[c,d]\times[p,q]} f(x,y,z)\, dxdydz = \Big(\int_a^b g(x)\, dx\Big)\cdot\Big(\int_c^d h(y)\, dy\Big)\cdot\Big(\int_p^q k(z)\, dz\Big).$$

Przykład 6

Zamień iloczyn całek pojedynczych

$$\iiint_P \ln x^{yz}\, dxdydz, \qquad P = [1,e]\times[1,2]\times[2,3].$$

$$\iiint_{[1,e]\times[1,2]\times[2,3]} \ln x^{yz}\, dxdydz = \int_2^3 \Big\{\int_1^2 \Big[\int_1^e yz\ln x\, dx\Big]\, dy\Big\} dz$$

Twierdzenie 13

Jeżeli f jest funkcją o rozdzielonych zmiennych postaci $f(x,y,z) = g(x)h(y)k(z)$, gdzie funkcje g, h, k są ciągłe odpowiednio na przedziałach $[a,b]$, $[c,d]$ i $[p,q]$, to

$$\iiint_{[a,b]\times[c,d]\times[p,q]} f(x,y,z)\,dxdydz = \Big(\int_a^b g(x)\,dx\Big)\cdot\Big(\int_c^d h(y)\,dy\Big)\cdot\Big(\int_p^q k(z)\,dz\Big).$$

Przykład 6

Zamień iloczyn całek pojedynczych

$$\iiint_P \ln x^{yz}\,dxdydz, \qquad P = [1,e]\times[1,2]\times[2,3].$$

$$\iiint_{[1,e]\times[1,2]\times[2,3]} \ln x^{yz}\,dxdydz = \int_2^3 \Big\{\int_1^2 \Big[\int_1^e yz\ln x\,dx\Big]\,dy\Big\}dz$$

$$= \Big(\int_1^e \ln x\,dx\Big)\cdot\Big(\int_1^2 y\,dy\Big)\cdot\Big(\int_2^3 z\,dz\Big).$$

Definicja 5

Niech

- U *będzie obszarem ograniczonym w przestrzeni,*
- $f(x, y, z)$ *będzie funkcją określoną i ograniczoną na* U*,*
- *definiujemy rozszerzenie funkcji* f *na prostopadłościan* P*:*

$$f^*(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{dla } (x, y, z) \in U \\ 0 & \text{dla } (x, y, z) \in P \setminus U \end{cases} .$$

Całkę potrójną z funkcji f *po obszarze* U *definiujemy wzorem:*

$$\iiint_U f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint_P f^*(x, y, z)\, dxdydz,$$

o ile całka po prostopadłościanie P *istnieje.*
Mówimy wtedy, że funkcja f *jest całkowalna na* U*.*

Definicja 5

Niech

- U *będzie obszarem ograniczonym w przestrzeni,*
- $f(x, y, z)$ *będzie funkcją określoną i ograniczoną na* U*,*
- *definiujemy rozszerzenie funkcji* f *na prostopadłościan* P*:*

$$f^*(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{dla } (x, y, z) \in U \\ 0 & \text{dla } (x, y, z) \in P \setminus U \end{cases} .$$

Całkę potrójną z funkcji f *po obszarze* U *definiujemy wzorem:*

$$\iiint_U f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint_P f^*(x, y, z)\, dxdydz,$$

o ile całka po prostopadłościanie P *istnieje.*
Mówimy wtedy, że funkcja f *jest całkowalna na* U*.*

Uwaga 3

Całka $\iiint_U f(x, y, z)\, dxdydz$ *nie zależy od wyboru prostopadłościanu* P*.*

Twierdzenie 14

Niech obszar U *ma postać:*

$$U = \{(x, y, z) : (x, y) \in D_{xy},\ d(x, y) \leqslant z \leqslant g(x, y)\},$$

gdzie $d(x, y), g(x, y)$ *są funkcjami ciągłymi na obszarze regularnym* D_{xy}
i $d(x, y) < g(x, y)$ *dla punktów* (x, y) *należących do wnętrza* D_{xy}
(jest to tzw. obszar normalny względem płaszczyzny x0y).
Jeżeli $f(x, y, z)$ *jest ciągła na obszarze* U, *to*

$$\iiint_U f(x, y, z)\, dxdydz = \iint_{D_{xy}} \Big[\int_{d(x,y)}^{g(x,y)} f(x, y, z)\, dz \Big] dxdy.$$

Twierdzenie 14

Niech obszar U ma postać:

$$U = \{(x,y,z) : (x,y) \in D_{xy},\ d(x,y) \leqslant z \leqslant g(x,y)\},$$

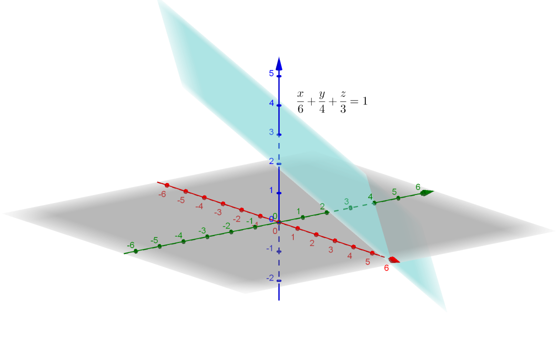
gdzie $d(x,y), g(x,y)$ są funkcjami ciągłymi na obszarze regularnym D_{xy} i $d(x,y) < g(x,y)$ dla punktów (x,y) należących do wnętrza D_{xy} (jest to tzw. obszar normalny względem płaszczyzny x0y). Jeżeli $f(x,y,z)$ jest ciągła na obszarze U, to

$$\iiint_U f(x,y,z)\, dxdydz = \iint_{D_{xy}} \Big[\int_{d(x,y)}^{g(x,y)} f(x,y,z)\, dz \Big] dxdy.$$

Uwaga 4

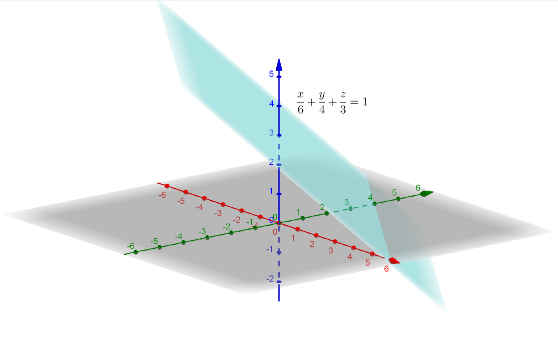
Prawdziwe są także analogiczne twierdzenia dotyczące obszarów normalnych względem pozostałych płaszczyzn układu współrzędnych ($x0z,\ y0z$).

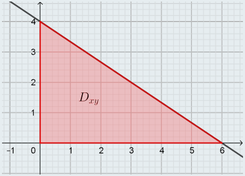
Całkę potrójną $\iiint_U f(x,y,z)\,dxdydz$ *zamienić na całki iterowane jeżeli obszar* U *ograniczony jest powierzchniami:* $2x+3y+4z=12,\ x=0,\ y=0$ *i* $z=0.$



Przykład 7

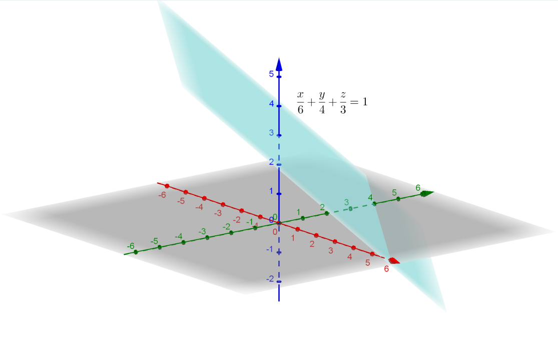
Całkę potrójną $\iiint_U f(x,y,z)\,dxdydz$ *zamienić na całki iterowane jeżeli obszar* U *ograniczony jest powierzchniami:* $2x+3y+4z=12,\ x=0,\ y=0$ *i* $z=0.$

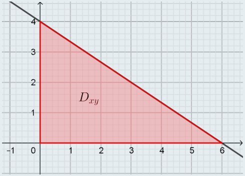




$$\iiint_U f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_{D_{xy}} \Big[\int_0^{3-\frac{x}{2}-\frac{3y}{4}} f(x,y,z)\,dz\Big]dxdy$$

Całkę potrójną $\iiint_U f(x,y,z)\,dxdydz$ *zamienić na całki iterowane jeżeli obszar* U *ograniczony jest powierzchniami:* $2x+3y+4z=12,\ x=0,\ y=0$ *i* $z=0$.





$$\iiint_U f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_{D_{xy}} \Big[\int_0^{3-\frac{x}{2}-\frac{3y}{4}} f(x,y,z)\,dz\Big]dxdy$$

$$= \int_0^6 \Big\{\int_0^{-\frac{2x}{3}+4} \Big[\int_0^{3-\frac{x}{2}-\frac{3y}{4}} f(x,y,z)\,dz\Big]\,dy\Big\}dx$$

Przykład 8

Obliczyć całkę potrójną z Przykładu 7 przyjmując $f(x,y,z) = x$.

Przykład 8

Obliczyć całkę potrójną z Przykładu 7 przyjmując $f(x,y,z)=x$.

$$\iiint_U f(x,y,z)\,dxdydz=\int_0^6\left\{\int_0^{-\frac{2x}{3}+4}\left[\int_0^{3-\frac{x}{2}-\frac{3y}{4}}x\,dz\right]dy\right\}dx$$

Przykład 8

Obliczyć całkę potrójną z Przykładu 7 przyjmując $f(x,y,z)=x$.

$$\iiint_U f(x,y,z)\,dxdydz = \int_0^6 \left\{ \int_0^{-\frac{2x}{3}+4} \left[\int_0^{3-\frac{x}{2}-\frac{3y}{4}} x\,dz \right] dy \right\} dx$$

$$= \int_0^6 \left\{ \int_0^{-\frac{2x}{3}+4} \left[x(3-\frac{x}{2}-\frac{3y}{4}) \right] dy \right\} dx$$

Przykład 8

Obliczyć całkę potrójną z Przykładu 7 przyjmując $f(x,y,z) = x$.

$$\iiint_U f(x,y,z)\,dxdydz = \int_0^6 \Big\{ \int_0^{-\frac{2x}{3}+4} \Big[\int_0^{3-\frac{x}{2}-\frac{3y}{4}} x\,dz \Big]\,dy \Big\} dx$$

$$= \int_0^6 \Big\{ \int_0^{-\frac{2x}{3}+4} \Big[x(3 - \frac{x}{2} - \frac{3y}{4}) \Big]\,dy \Big\} dx$$

$$\int_0^{-\frac{2x}{3}+4} \Big(3x - \frac{x^2}{2} - \frac{3yx}{4}\Big)\,dy = \Big[3xy - \frac{x^2 y}{2} - \frac{3y^2 x}{8}\Big]_{y=0}^{y=-\frac{2x}{3}+4}$$

Przykład 8

Obliczyć całkę potrójną z Przykładu 7 przyjmując $f(x,y,z)=x$.

$$\iiint_U f(x,y,z)\,dxdydz = \int_0^6 \Big\{ \int_0^{-\frac{2x}{3}+4} \Big[\int_0^{3-\frac{x}{2}-\frac{3y}{4}} x\,dz \Big]\,dy \Big\} dx$$

$$= \int_0^6 \Big\{ \int_0^{-\frac{2x}{3}+4} \Big[x(3-\frac{x}{2}-\frac{3y}{4}) \Big]\,dy \Big\} dx$$

$$\int_0^{-\frac{2x}{3}+4} \big(3x - \frac{x^2}{2} - \frac{3yx}{4}\big)\,dy = \Big[3xy - \frac{x^2y}{2} - \frac{3y^2x}{8}\Big]_{y=0}^{y=-\frac{2x}{3}+4}$$

$$= 3x\big(4-\frac{2x}{3}\big) - \frac{x^2}{2}\big(4-\frac{2x}{3}\big) - \frac{3x}{8}\big(4-\frac{2x}{3}\big)^2$$

Przykład 8

Obliczyć całkę potrójną z Przykładu 7 przyjmując $f(x,y,z) = x$.

$$\iiint_U f(x,y,z)\,dxdydz = \int_0^6 \Big\{ \int_0^{-\frac{2x}{3}+4} \Big[\int_0^{3-\frac{x}{2}-\frac{3y}{4}} x\,dz \Big]\,dy \Big\} dx$$

$$= \int_0^6 \Big\{ \int_0^{-\frac{2x}{3}+4} \Big[x(3-\frac{x}{2}-\frac{3y}{4}) \Big]\,dy \Big\} dx$$

$$\int_0^{-\frac{2x}{3}+4} \left(3x - \frac{x^2}{2} - \frac{3yx}{4}\right) dy = \left[3xy - \frac{x^2y}{2} - \frac{3y^2x}{8}\right]_{y=0}^{y=-\frac{2x}{3}+4}$$

$$= 3x\left(4 - \frac{2x}{3}\right) - \frac{x^2}{2}\left(4 - \frac{2x}{3}\right) - \frac{3x}{8}\left(4 - \frac{2x}{3}\right)^2$$

$$= 12x - 2x^2 - 2x^2 + \frac{x^3}{3} - 6x + 2x^2 - \frac{x^3}{6} = \frac{x^3}{6} - 2x^2 + 6x$$

Przykład 8

Obliczyć całkę potrójną z Przykładu 7 przyjmując $f(x,y,z)=x$.

$$\iiint_U f(x,y,z)\,dxdydz=\int_0^6\Big\{\int_0^{-\frac{2x}{3}+4}\Big[\int_0^{3-\frac{x}{2}-\frac{3y}{4}}x\,dz\Big]\,dy\Big\}dx$$

$$=\int_0^6\Big\{\int_0^{-\frac{2x}{3}+4}\Big[x(3-\frac{x}{2}-\frac{3y}{4})\Big]\,dy\Big\}dx$$

$$=\int_0^6\Big\{\frac{x^3}{6}-2x^2+6x\Big\}dx$$

$$\int_0^{-\frac{2x}{3}+4}\big(3x-\frac{x^2}{2}-\frac{3yx}{4}\big)\,dy=\Big[3xy-\frac{x^2y}{2}-\frac{3y^2x}{8}\Big]_{y=0}^{y=-\frac{2x}{3}+4}$$

$$=3x\big(4-\frac{2x}{3}\big)-\frac{x^2}{2}\big(4-\frac{2x}{3}\big)-\frac{3x}{8}\big(4-\frac{2x}{3}\big)^2$$

$$=12x-2x^2-2x^2+\frac{x^3}{3}-6x+2x^2-\frac{x^3}{6}=\frac{x^3}{6}-2x^2+6x$$

Przykład 8

Obliczyć całkę potrójną z Przykładu 7 przyjmując $f(x,y,z)=x$.

$$\iiint_U f(x,y,z)\,dxdydz = \int_0^6 \Big\{ \int_0^{-\frac{2x}{3}+4} \Big[\int_0^{3-\frac{x}{2}-\frac{3y}{4}} x\,dz \Big]\,dy \Big\} dx$$

$$= \int_0^6 \Big\{ \int_0^{-\frac{2x}{3}+4} \Big[x(3-\frac{x}{2}-\frac{3y}{4}) \Big]\,dy \Big\} dx$$

$$= \int_0^6 \Big\{ \frac{x^3}{6} - 2x^2 + 6x \Big\} dx$$

$$= \Big[\frac{x^4}{24} - \frac{2x^3}{3} + 3x^2 \Big]_0^6 = \frac{6^3}{4} - \frac{2\cdot 6^3}{3} + 3\cdot 6^2$$

Przykład 8

Obliczyć całkę potrójną z Przykładu 7 przyjmując $f(x,y,z) = x$.

$$\iiint_U f(x,y,z)\,dxdydz = \int_0^6 \Big\{ \int_0^{-\frac{2x}{3}+4} \Big[\int_0^{3-\frac{x}{2}-\frac{3y}{4}} x\,dz \Big]\,dy \Big\} dx$$

$$= \int_0^6 \Big\{ \int_0^{-\frac{2x}{3}+4} \Big[x(3 - \frac{x}{2} - \frac{3y}{4}) \Big]\,dy \Big\} dx$$

$$= \int_0^6 \Big\{ \frac{x^3}{6} - 2x^2 + 6x \Big\} dx$$

$$= \Big[\frac{x^4}{24} - \frac{2x^3}{3} + 3x^2 \Big]_0^6 = \frac{6^3}{4} - \frac{2\cdot 6^3}{3} + 3\cdot 6^2$$

$$6^2\Big(\frac{3}{2} - 4 + 3\Big) = 18$$

Definicja 6

Sumę skończonej liczby obszarów normalnych względem płaszczyzn układu współrzędnych o parami rozłącznych wnętrzach nazywamy obszarem regularnym w przestrzeni.

Definicja 6

Sumę skończonej liczby obszarów normalnych względem płaszczyzn układu współrzędnych o parami rozłącznych wnętrzach nazywamy obszarem regularnym w przestrzeni.

Twierdzenie 15

Całki po obszarach regularnych mają te same własności co całki po prostopadłościanach, tzn. liniowość, addytywność względem obszaru całkowania.